

СВОЙСТВО ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ РАССЛОЕННЫХ ЛАМИНАРНЫХ ПОТОКОВ В КАНАЛАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Гешев П.И.^{1,2}

¹ Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,
630090, Россия, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 1

² Новосибирский государственный университет,
630090, Россия, Новосибирск, ул. Пирогова, 2

Совместное течение газа и жидкости в микроканалах - актуальное для современной гидродинамики и нанотехнологии явление. Оно важно для разделительных мембранных технологий, для тепловых труб и насосов, для теплообменников на микросхемах, для аналитических устройств в биологии и медицине (Lab-on-chip). На шероховатых стенках из гидрофобного материала поток жидкости движется над микро-кавернами, что приводит к ненулевой средней скорости скольжения на стенке и к уменьшению касательного напряжения трения и увеличению расхода жидкости. В нашей работе доказано общее свойство взаимности расслоенных многофазных потоков, текущих в канале с произвольной формой поперечного сечения.

Движущие силы для различных компонент или фаз могут иметь различную природу. Это могут быть силы давления, силы тяжести, электрические силы, действующие на объемно-распределенные заряды (ионы). Мы рассмотрим общий случай течения N несмешивающихся жидкостей в канале с произвольной внешней границей Γ . Пусть плотность и вязкость жидкости i -того компонента есть ρ_i и μ_i , соответственно. Плотность объемных сил, действующих в области S_i , есть

$$F_i = \rho_i g_z - \frac{\partial p}{\partial z}$$

где z - продольная координата вдоль оси канала, p - общее давление в канале, одинаковое в данном сечении для всех жидкостей, g_z - проекция силы тяжести на ось канала. Плотность силы F_i действует непосредственно на i -тую жидкость в области S_i и через сопряженные граничные условия на границе i -той и j -той жидкостей влияние этой силы передается и на все остальные компоненты с $i \neq j$. В силу линейности задачи расход, текущий в i -том канале, должен определяться линейным соотношением

$$Q_i = \sum_{j=1}^N L_{ij} F_j \quad (1)$$

где L_{ij} - матрица коэффициентов расхода. Формула (1) напоминает связь между обобщенными термодинамическими силами и потоками в неравновесной термодинамике Онзагера [8]. В теории Онзагера постулировалось, что матрица феноменологических коэффициентов симметрична по индексам. В статистической физике свойство симметрии матрицы Онзагера доказывается строго. Оно связано с обратимостью движения на микро-уровне. Мы докажем симметрию матрицы коэффициентов расхода - свойство взаимности

$$L_{ij} = L_{ji}$$

в общем виде на основе динамических уравнений движения вязкой жидкости, уравнений Навье-Стокса.

Пусть i -тый компонент имеет вязкость μ_i и описывается полем скорости $u_i(\mathbf{x})$ в области $\mathbf{x} \in S_i$. Из стационарного уравнения Навье-Стокса для установившегося течения в прямом канале следует система N уравнений Пуассона:

$$\mu_i \Delta u_i = -F_i \quad (\mathbf{x} \in S_i, \quad i=1, \dots, N). \quad (2)$$

На границе Γ_{ij} , разделяющей две соседние области S_i и S_j , должны выполняться граничные условия, то есть равенства скоростей и касательных напряжений:

$$u_i = u_j \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_{ij}), \quad (3)$$

$$\mu_i \frac{\partial u_i}{\partial n} = \mu_j \frac{\partial u_j}{\partial n} \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_{ij}). \quad (4)$$

На внешней границе канала Γ скорость жидкости удовлетворяет условию прилипания

$$u_i = 0 \quad (\mathbf{x} \in \Gamma). \quad (5)$$

Доказательство симметрии матрицы L_{ij} проведено на основе обобщенной функции Грина для граничной задачи 1-ого рода уравнения Пуассона:

$$\nabla_{\xi} [\mu(\xi) \nabla_{\xi} G(\xi, \mathbf{x})] = -\delta(\xi - \mathbf{x}), \quad (6)$$

где $\mu(\xi)$ вязкость жидкости в точке ξ и $\delta(\xi - \mathbf{x})$ дельта-функция Дирака. Предполагаем, что функция Грина удовлетворяет нулевому граничному условию на границе канала

$$G(\xi, \mathbf{x}) = 0 \quad (\xi \in \Gamma). \quad (7)$$

В нашей работе [1] доказано соотношение взаимности для обобщенной функции Грина

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \quad (8)$$

Общее решение уравнений (2)-(4) представляется по формуле Грина

$$u(\mathbf{x}) = \iint G(\mathbf{x}, \xi) F(\xi) d^2 \xi. \quad (9)$$

При выводе представления (9) мы использовали теорему Грина и нулевые граничные условия для функций u и G на внешнем контуре Γ . Проинтегрировав по всем областям S_j , получаем полное решение:

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N U_{ij}(\mathbf{x}) F_j \quad (\mathbf{x} \in S_i), \quad (10)$$

где матричное решение

$$U_{ij}(\mathbf{x}) = \iint_{S_j} G(\mathbf{x}, \xi) d^2 \xi$$

удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\mu_i \Delta U_{ij} = -\delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, N) \quad (11)$$

и сопряженным граничным условиям типа (3), (4) на Γ_{ij} и нулевым условиям (5) на внешнем контуре Γ . Интегрируя выражение (9) по области S_i получаем расход

$$Q_i = \sum_{j=1}^N F_j \int_{S_i} U_{ij}(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x} = \sum_{j=1}^N L_{ij} F_j,$$

где $L_{ij} = \iint_{S_i S_j} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{y}$ – симметричная матрица в силу свойства взаимности (8).

Таким образом, симметрия матрицы коэффициентов расхода L_{ij} обусловлена фундаментальным свойством обобщенной функции Грина, – симметрией по векторным аргументам (свойством взаимности).

Симметрия матрицы коэффициентов расхода продемонстрирована на ряде примеров: многослойные течения в плоском и кольцевом каналах, в круглой трубе, для расслоенных газожидкостных течений в эллиптических трубах. Для симметричного двухфазного потока жидкости и газа получен коэффициент увеличения расхода и показано, что расход жидкости может увеличиться на порядок за счет увлечения легким маловязким газом, текущим в пристенном слое. Разработанный метод доказательства теоремы взаимности применен к аналогичной проблеме – доказательству симметрии матрицы взаимных коэффициентов теплоотдачи в системе нагреваемых излучением металлических наночастиц.

Список литературы:

1. П.И. Гешев. Свойство взаимности для расслоенных ламинарных потоков в каналах с поперечным сечением произвольной формы // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 3. С. 65-72.